

**LXX олимпиада по математике Эстонии**  
**ШКОЛЬНЫЙ ТУР ТАЛЛИННА**  
**Таллинн, 12 января 2023 года**  
**XI класс**

Время, отводимое для решения: 4 часа.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. В продажу поступила новая модель телефона. На второй неделе после поступления в продажу цену телефона снизили на 10%. Затем на третьей неделе цену телефона повысили, причем теперь его цена стала выше первоначальной. На четвертой неделе после поступления в продажу цену снизили снова, в этот раз на 50%. На сколько процентов цена телефона на четвертой неделе была ниже, чем первоначальная цена, если известно, что разница в цене между второй и третьей неделями была такая же, как и разница в цене между второй и четвертой неделями?
2. Докажите, что неравенство  $4x^4 + 3x^2 + 5 > 2x^3 + 4x$  выполняется для любого  $x \in \mathbb{R}$ .
3. Покажите, что число  $2020 \cdot 2021 \cdot 2022 \cdot 2023 + 1$  является квадратом некоторого целого числа.
4. Величина угла  $BAC$  при вершине остроугольного равнобедренного треугольника  $ABC$  равна  $2\alpha$  градусов. Высоты  $AD$  и  $BE$  этого треугольника пересекаются в точке  $L$ . (Точки  $D$  и  $E$  – это основания высот на соответствующих сторонах треугольника).
  - 1) Покажите, что величина угла при основании этого треугольника  $ABC$  больше половины угла при вершине.
  - 2) Найдите  $\frac{|LD|}{|AD|}$  т.е. отношение длин отрезков  $LD$  и  $AD$ .
5. На полу лежит 10 кучек с монетами, в каждой из которых по 21 монете. Петр и Индрек играют в игру, в которой они по очереди берут монеты из кучек, причём Петр в свой ход берет по 4 монеты из двух разных кучек (всего 8 монет), а Индрек в свой ход берет 13 монет из одной кучки. Если в кучке количество монет меньше, чем мальчик должен взять, то из этой кучки он брать монеты не может. Если во всех кучках монет меньше чем мальчик должен взять, то он пропускает ход. Если никто из игроков не может больше взять монеты, то игра заканчивается и побеждает тот игрок, у которого больше монет. Если оба мальчика пытаются набрать как можно больше монет и Петр начинает игру, то кто победит?